

Der verwirrte Passagier

NORBERT HENZE, KARLSRUHE

Zusammenfassung: Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält der letzte in ein ausgebuchtes Flugzeug einsteigende Passagier den auf der Bordkarte notierten Platz, wenn der erste Fluggast rein zufällig Platz nimmt und alle nachfolgenden Passagiere, die ihren jeweiligen Platz besetzt vorfinden, unter den dann noch freien Sitzen rein zufällig wählen? Die Antwort $1/2$ hängt überraschenderweise nicht von der Anzahl der Reisenden ab.

1 Problem und Lösung

Das folgende Problem findet sich in unterschiedlichen Einkleidungen unter anderem in Bollobás (2006, S. 177), Winkler (2004, S. 33) und Nigusie (2014): Ein Flugzeug mit $n \geq 2$ Plätzen ist ausgebucht. Die Passagiere steigen der Reihe nach ein. Der erste, verwirrte Fluggast hat seine Bordkarte verloren und setzt sich rein zufällig auf einen der n Plätze. Jede weitere Person setzt sich auf den ihr durch die Bordkarte zugewiesenen Platz, falls dieser frei ist, andernfalls wählt sie rein zufällig einen der noch freien Sitzplätze aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält der zuletzt einsteigende Passagier seinen Platz?

Das Problem sieht auf den ersten Blick kompliziert aus. Die (von n unabhängige) Lösung fällt aber nach einigen Überlegungen wie Schuppen von den Augen. Im Fall $n = 2$ ist die Antwort offenbar $1/2$, denn der zweite (und damit letzte) Passagier sitzt genau dann richtig, wenn sich die verwirrte Person nicht auf dessen Platz setzt. Was passiert im Fall von mehr als zwei Plätzen? Wir nummerieren die n Plätze gedanklich von 1 bis n durch und vereinbaren ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass der j -ten einsteigenden Person durch die Bordkarte Platz j zugewiesen ist, $j = 1, \dots, n$. Nach dem oben vereinbarten Einstiegs-Modus gibt es für $n = 3$ die zusammen mit ihren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten aufgelisteten vier möglichen Sitzverteilungen

Plätze	1	2	3	W'
	1	2	3	$1/3$
	2	1	3	$1/6$
	3	1	2	$1/6$
	3	2	1	$1/3$

Wählt der verwirrte Passagier einen der Sitzplätze 1 oder 3 aus (was jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1/3$ passiert), so findet der danach einsteigende Flug-

gast seinen Platz unbesetzt vor, sodass die Sitzverteilung festgelegt ist. Andernfalls entscheidet Passagier 2 mithilfe einer echten Münze, ob er sich auf Platz 1 oder 3 setzt, was nach der ersten Pfadregel zu den beiden Wahrscheinlichkeiten $1/6$ führt. Die zuletzt einsteigende Person (Nr. 3) erhält also ihren Platz mit der Wahrscheinlichkeit $1/3 + 1/6 = 1/2$.

Im Fall $n = 4$ gibt es die zusammen mit ihren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten aufgelisteten, nach aufsteigender Größe des von Passagier 1 gewählten Platzes sortierten Sitzverteilungen:

Plätze	1	2	3	4	W'
	1	2	3	4	$1/4$
	2	1	3	4	$1/12$
	3	1	2	4	$1/24$
	4	1	2	3	$1/24$
	4	1	3	2	$1/12$
	4	2	1	3	$1/8$
	3	2	1	4	$1/8$
	4	2	3	1	$1/4$

Auch in diesen Fällen findet die erste Pfadregel Anwendung. So ergibt sich etwa die Sitzverteilung 2 1 3 4, wenn sich Fluggast 1 auf Platz 2 setzt (was mit der Wahrscheinlichkeit $1/4$ geschieht) und sich dann Passagier 2, der seinen Platz besetzt vorfindet, unter den drei verbleibenden gleich wahrscheinlichen Plätzen für Platz 1 entscheidet. Da die beiden verbleibenden Reisenden ihre jeweiligen Plätze unbesetzt vorfinden, ist die restliche Sitzverteilung festgelegt. In ähnlicher Weise ergeben sich alle anderen Wahrscheinlichkeiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass die zuletzt einsteigende Person ihren Platz erhält, ist somit

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Natürlich können fleißige Schülerinnen und Schüler noch den Fall $n = 5$ (für den sich 16 mögliche Sitzverteilungen ergeben) in gleicher Weise behandeln. Auch hier berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass der letzte Fluggast seinen Platz erhält, zu $1/2$.

Kann man allgemein einsehen, dass die eingangs gestellte Frage unabhängig von n immer die Antwort $1/2$ besitzt? Wir betrachten hierzu noch einmal den Fall $n = 4$. Offenbar findet die zuletzt einsteigende Person entweder nur Platz 1 oder ihren Platz (Nr. 4)

unbesetzt vor. Gilt dieser Sachverhalt auch ganz allgemein bei n Plätzen? Die Antwort ist „Ja“, und sie lässt sich wie folgt begründen:

Setzt sich Passagier 1 auf seinen Platz (Nr. 1), so finden alle weiteren Fluggäste ihre jeweiligen Plätze frei vor. Insbesondere erhält der letzte Reisende seinen Platz Nr. n . Setzt sich Passagier 1 auf Platz n , so finden die danach einsteigenden Personen mit den Nummern 2 bis $n - 1$ ihre jeweiligen Plätze unbesetzt vor, sodass für den letzten Passagier nur Platz Nr. 1 übrig bleibt.

Was passiert aber, wenn sich der verwirrte Fluggast auf einen der Plätze $2, \dots, n - 1$ setzt? Trägt dieser Platz die Nummer j , so finden die Passagiere $2, \dots, j - 1$ ihre jeweiligen Plätze frei vor und setzen sich. Der j -te Einsteigende ist aber jetzt in der Rolle des verwirrten Passagiers, denn sein Platz ist besetzt, und er muss sich rein zufällig zwischen einem der Plätze $1, j + 1, \dots, n$ entscheiden.

Fällt diese Entscheidung für einen der beiden Plätze 1 und n aus, so können sich die Passagiere $j + 1, \dots, n - 1$ auf ihre jeweiligen Plätze setzen, und für den letzten Fluggast bleibt nur entweder Platz 1 oder Platz n übrig. Setzt sich der j -te Reisende jedoch auf einen der Plätze $j + 1, \dots, n - 1$ und wählt etwa Platz k , so nehmen die Passagiere mit den Nummern $j + 1, \dots, k - 1$ ihre jeweiligen freien Plätze ein, und die Rolle der verwirrten Person wird von Passagier k eingenommen, der sich rein zufällig zwischen einem der Plätze $1, k + 1, \dots, n$ entscheiden muss.

Irgendwann wird aber einer der Plätze 1 oder n besetzt, und aus Symmetriegründen (Gleichwahrscheinlichkeit!) geht diese Entscheidung mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ zugunsten von Platz 1 aus. Genau dann erhält aber der zuletzt einsteigende Fluggast seinen Platz.

Der springende Punkt bei diesem Problem ist, dass die Plätze $2, \dots, n - 1$ irrelevant sind und in gewisser Weise „nur Verwirrung stiften“. Irgendwann im Verlaufe des Einstiegs-Prozesses findet – bevor der letzte Fluggast einsteigt – eine reine Zufallsentscheidung zwischen den Plätzen 1 und n statt. Letztlich hängt also die Entscheidung, ob der zuletzt einsteigende Reisende seinen Platz unbesetzt vorfindet, vom Ergebnis des Wurfes einer echten Münze ab.

In den Spezialfällen $n = 3$ und $n = 4$ erhält der *vorletzte* Fluggast seinen Platz mit der Wahrscheinlichkeit $2/3$. Auch dieser Sachverhalt gilt allgemein, denn hier kommt es nur darauf an, wie die Entscheidung für einen der Plätze 1, $n - 1$ und n ausgeht. Wird einer der Plätze 1 oder n besetzt, bevor Fluggast $n - 1$ einsteigt (was mit der Wahrscheinlichkeit $2/3$ geschieht), so kann dieser Fluggast seinen Platz einnehmen, siehe hierzu auch Nigussie (2014).

2 Schlussbemerkungen

Eine ähnliche Situation liegt bei der Frage „Wie wahrscheinlich ist es, beim wiederholten Werfen eines echten Würfels vor der ersten Sechs mindestens eine Vier zu werfen?“ vor. Hier sind die Zahlen 1, 2, 3 und 5 irrelevant; ihr Auftreten bedeutet nur Zeitverschwendung. Wenn aber eine Vier oder eine Sechs auftritt, hat jede dieser beiden Möglichkeiten die Wahrscheinlichkeit $1/2$.

Man kann also eine echte Münze nehmen und deren Seiten mit 4 und 6 beschriften. Das interessierende Ereignis bedeutet dann, dass *ein* Wurf dieser Münze eine Vier ergibt, und die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $1/2$, siehe Henze (2009).

Danksagung: Ich danke Elke Warmuth, dass sie mir dieses Problem zugetragen hat, sowie den Gutachtern für eine gründliche Durchsicht des Manuskriptes.

Literatur

- Bollobás, B. (2006): *The art of mathematics: Coffee time in Memphis*. Cambridge: Cambridge University Press.
Henze, N. (2009): Wie viele Vieren vor der ersten Sechs? In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 62, 464–465.
Nigussie, Y. (2014): Finding your seat versus tossing a coin. In: *The American Mathematical Monthly* 121, 545–546.
Winkler, P. (2004): *Mathematical puzzles: A connoisseur's collection*. Natick, MA: A.K. Peters.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Norbert Henze
Institut für Stochastik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Englerstr. 2
76131 Karlsruhe
Henze@kit.edu